О СОСТОЯТЕЛЬНОСТИ ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С НЕРЕГУЛЯРНЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ

Н. Н. Труш, Т. И. Воротницкая

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь
Естественно-гуманитарный университет
Седлице, Польша
E-mail: TroushNN@bsu.by, iliukevich@bsu.by

Построена оценка спектральной плотности стационарного случайного процесса, модулируемого известным дискретным случайным процессом. Исследованы основные статистические свойства построенной оценки.

Ключевые слова: стационарный случайный процесс, амплитудная модуляция, нерегулярные наблюдения, спектральная плотность.

Рассмотрим стационарный в широком смысле случайный процесс $X(t)$, $t \in Z$, с математическим ожиданием m^X, ковариационной функцией $R^X(\tau)$, $\tau \in Z$, дисперсией D^X, спектральной плотностью $f^X(\lambda)$, $\lambda \in \Pi = [-\pi, \pi]$, смешанными моментами n-го порядка $m_n^X(t_1,...,t_{n-1})$ и смешанными семиинвариантами n-го порядка $c_n^X(t_1,...,t_{n-1})$, $t_j \in Z$, $j = \overline{1, n-1}$.

Пусть известны наблюдения за процессом $Y(t)$, $t \in Z$, который является результатом амплитудной модуляции процесса $X(t)$, $t \in Z$:

$$Y(t) = X(t)d(t), \tag{1}$$

где $d(t)$, $t \in Z$, – случайный процесс с известными характеристиками. В этом случае также говорят, что $X(t)$ – процесс с нерегулярными наблюдениями [1, 3].

В работе [2] получена оценка спектральной плотности в случае, когда $d(t)$, $t \in Z$, – стационарный в широком смысле случайный процесс. В данной статье рассмотрим случай, когда процессы $X(t)$ и $d(t)$ независимы, а $d(t)$, $t \in Z$, – последовательность независимых случайных величин с математическим ожиданием m^d, дисперсией D^d, моментами k-го порядка m_k^d, k = 2, 3, 4. Известно [3], что в этом случае процесс $Y(t)$, $t \in Z$, будет являться стационарным случайным процессом.

Пусть получено T последовательных через равные промежутки времени наблюдений

$$Y(0),\ Y(1),\ \ldots,\ Y(T-1) \tag{2}$$

за процессом $Y(t)$, $t \in Z$. Возникает задача оценивания основных характеристик процесса $X(t)$ по наблюдениям (2).

В работе [3] по наблюдениям (2) строились оценки математического ожидания m^X, ковариационной функции $R^X(\tau)$, $\tau \in Z$, исследовались свойства их моментов и находилось предельное распределение. В [1] была построена оценка спектральной плотности стационарного случайного процесса, модулируемого дискретным случайным процессом, и исследованы ее статистические свойства.

В данной работе для исследования оценки спектральной плотности $f^X(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, предлагается другой подход, в котором вначале строится оценка спектральной плотности процесса $Y(t)$, а затем, используя полученное равенство, связывающее характеристики процессов $X(t)$ и $Y(t)$, строится оценка спектральной плотности $f^X(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$.

Теорема 1. Если процессы $Y(t)$ и $X(t)$, $t \in Z$, связаны равенством (1), а процесс $d(t)$ не зависит от процесса $X(t)$, $t \in Z$, то

$$m^X = \frac{m^Y}{m^d}, \tag{3}$$

$$R^X(\tau) = \begin{cases} \dfrac{D^Y - (m^X)^2 D^d}{D^d + (m^d)^2}, \ \tau = 0, \\ \dfrac{R^Y(\tau)}{(m^d)^2}, \ \tau \neq 0, \end{cases} \quad \tau \in Z, \tag{4}$$

$$f^X(\lambda) = \frac{1}{(m^d)^2} f^Y(\lambda) - \frac{1}{2\pi}\left(\frac{D^d\left((m^X)^2 (m^d)^2 + D^Y\right)}{\left(D^d + (m^d)^2\right)(m^d)^2} \right), \quad \lambda \in \Pi, \tag{5}$$

где $R^Y(\tau)$, $\tau \in Z$, – ковариационная функция процесса $Y(t)$, $t \in Z$, $f^Y(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, – его спектральная плотность, D^Y – дисперсия.

Доказательство. Учитывая независимость процессов $X(t)$ и $d(t)$, соотношение (3) вытекает очевидным образом.

Используя определение ковариационной функции, независимость процессов $X(t)$ и $d(t)$, получим

$$R^Y(t+\tau, t) = MY(t+\tau)Y(t) - MY(t+\tau)MY(t) =$$
$$= MX(t+\tau)X(t)Md(t+\tau)d(t) - MX(t+\tau)MX(t)Md(t+\tau)Md(t).$$

Учитывая стационарность процесса $X(t)$, перепишем последнее равенство

$$R^Y(t+\tau, t) = \begin{cases} D^X\left(D^d + (m^d)^2\right) + (m^X)^2 D^d, \ \tau = 0, \\ R^X(\tau)(m^d)^2, \ \tau \neq 0. \end{cases}$$

Выражая из последнего соотношения ковариационную функцию процесса $X(t)$, получим (4).

Рассмотрим спектральную плотность процесса $X(t)$

$$f^X(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R^X(\tau) e^{-i\lambda\tau}$$

и подставим выражение ковариационной функции процесса $X(t)$ через ковариационную функцию процесса $Y(t)$

$$f^X(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{\tau=-\infty \\ \tau \neq 0}}^{\infty} \frac{R^Y(\tau)}{(m^d)^2} e^{-i\lambda\tau} + \frac{1}{2\pi} \frac{D^Y - (m^X)^2 D^d}{D^d + (m^d)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \frac{R^Y(\tau)}{(m^d)^2} e^{-i\lambda\tau} - \frac{1}{2\pi} \frac{D^Y}{(m^d)^2} + \frac{1}{2\pi} \frac{D^Y - (m^X)^2 D^d}{D^d + (m^d)^2} =$$

$$=\frac{1}{(m^d)^2}f^Y(\lambda)-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{D^d\left((m^X)^2(m^d)^2+D^Y\right)}{\left(D^d+(m^d)^2\right)(m^d)^2}\right).$$

Таким образом, соотношение (5) доказано. Теорема доказана.

В качестве оценки спектральной плотности процесса $X(t)$ рассмотрим статистику вида

$$\hat{f}^X(\lambda)=\frac{1}{(m^d)^2}\hat{f}^Y(\lambda)-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{D^d\left((m^X)^2(m^d)^2+D^Y\right)}{\left(D^d+(m^d)^2\right)(m^d)^2}\right), \tag{6}$$

где

$$\hat{f}^Y(\lambda_s)=\sum_{k=-\left[\frac{T}{2}\right]+1}^{\left[\frac{T}{2}\right]}\varphi^T(k)I_T(\lambda_{s+k}), \tag{7}$$

а $\varphi^T(k)$, $k\in Z$, – произвольная, не зависящая от наблюдений четная целочисленная функция, для которой $\varphi^T(k)=0$ для $k\notin\left(-\left[\frac{T}{2}\right]+1,\left[\frac{T}{2}\right]\right)$, s – целое число, $-\left[\frac{T}{2}\right]+1\le s\le\left[\frac{T}{2}\right]$, $\left[\frac{T}{2}\right]$ – целая часть числа $\frac{T}{2}$, используемая в (7) статистика

$$I^T(\lambda)=\frac{1}{2\pi T}\sum_{t=0}^{T-1}\sum_{s=0}^{T-1}Y(t)Y(s)e^{-i\lambda(t-s)},\ \lambda\in\Pi, \tag{8}$$

является периодограммой [3].

Исследуем основные статистические свойства оценки (6).

Теорема 2. Пусть спектральная плотность $f^X(\lambda)$ непрерывна на Π, тогда оценка спектральной плотности процесса $X(t)$ является асимптотически несмещенной.

Доказательство. В [3] доказано, что (7) является асимптотически несмещенной оценкой спектральной плотности процесса $Y(t)$. Рассмотрим предел математического ожидания оценки (6) спектральной плотности процесса $X(t)$.

$$\lim_{T\to\infty}M\hat{f}^X(\lambda)=\frac{1}{(m^d)^2}\lim_{T\to\infty}M\hat{f}^Y(\lambda)-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{D^d\left((m^X)^2(m^d)^2+D^Y\right)}{\left(D^d+(m^d)^2\right)(m^d)^2}\right).$$

Учитывая соотношение (5) и асимптотическую несмещенность оценки (7), получим

$$\lim_{T\to\infty}M\hat{f}^X(\lambda)=\frac{1}{(m^d)^2}f^Y(\lambda)-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{D^d\left((m^X)^2(m^d)^2+D^Y\right)}{\left(D^d+(m^d)^2\right)(m^d)^2}\right)=f^X(\lambda).$$

Таким образом, оценка (6) также является асимптотически несмещенной. Теорема доказана.

Теорема 3. Если семиинвариантная спектральная плотность четвёртого порядка $f_4^X(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ непрерывна на Π^3, спектральная плотность $f^X(\lambda)$ непрерывна на Π и

$$\sum_{k=-\left[\frac{T}{2}\right]+1}^{\left[\frac{T}{2}\right]}\left[\varphi^T(k)\right]^2\xrightarrow[T\to\infty]{}0,$$

то статистика, задаваемая равенством (6), является состоятельной в среднеквадратическом смысле.

Доказательство. Рассмотрим дисперсию оценки (6).

$$D\hat{f}^{X}(\lambda) = \frac{1}{(m^{d})^{4}} D\hat{f}^{Y}(\lambda).$$

Используя результат, полученный в работе [3], а именно, что в условиях теоремы $D\hat{f}^{Y}(\lambda) \to 0$ при $T \to \infty$ для всех $\lambda \in \Pi$, имеем $D\hat{f}^{X}(\lambda) \to 0$ при $T \to \infty$ для $\lambda \in \Pi$, что и доказывает состоятельность в среднеквадратическом смысле оценки $\hat{f}^{X}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Воротницкая, Т. И.* Оценка спектральной плотности дискретного стационарного случайного процесса с нерегулярностями / Т. И. Воротницкая // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и их приложения. Мн. : РИВШ, 2014. С. 27–32.

2. *Воротницкая, Т. И.* Оценка спектральной плотности стационарного случайного процесса с нерегулярными наблюдениями / Т. И. Воротницкая // Вестн. БГУ. 2010. Сер. 1. № 1. С. 118–122.

3. *Труш, Н. Н.* Асимптотические методы статистического анализа временных рядов / Н. Н. Труш. Мн. : БГУ, 1999. 219 с.